7-ЛЕКЦИЯ. Біртексіз сызықты теңдеулер

Лекция мақсаты: Біртексіз сызықты теңдеулердің қасиеттерімен таныстыру.
Негізгі сөздер: Тұрақты санды вариациялау, суперпозиция, жалпы шешім.
Қысқаша мазмұны
Біртексіз сызықты теңдеулер

5.1. Төмендегідей біртексіз сызықты теңдеуді қарастырайық:

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x) \qquad (1)$$

Мұнда да коэффициенттер мен бос мүше кейбір $\langle a,b \rangle$ аралығында үздіксіз функциялар деп есептелінеді. Осы теңдеудің сәйкес біртектісін қоса қарастырайық:

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0 \qquad (2)$$

Бұл екі теңдеудің шешімдерінің арасында тығыз байланыстар бар.

1^0. Егер $\tilde{y}$ біртексіз (1) теңдеудің шешімі, ал y_1 біртекті (2) теңдеудің шешімі болса, онда $y = \tilde{y} + y_1$ функциясы (1) теңдеудің шешімін береді.

Шынында да, $L[\tilde{y}] = f(x), L[y_1] = 0, \forall x \in \langle a,b \rangle$. Осыдан

$$L[\tilde{y} + y_1] = L[\tilde{y}] + L[y_1] = f(t), \forall x \in \langle a,b \rangle \ .$$

2^0. Егер $\tilde{y}_1$ және $\tilde{y}_2$ функциялары (1) теңдеудің шешімдері болса, онда олардың айырмасы (2) теңдеудің шешімін береді.

Шыныда да, $L[\tilde{y}_1] = f(x), L[\tilde{y}_2] = f(x)$. Осыдан

$$L[\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2] = L[\tilde{y}_1] - L[\tilde{y}_2] = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in \langle a,b \rangle.$$

3^0. Егер (1) теңдеуде $f(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)$ болса, ал y_i функциясы $L[y] = f_i(x)$ теңдеуінің шешімі болса, онда

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} y_i\right] = \sum_{i=1}^{m} L[y_i] = \sum_{i=1}^{m} f_i(x), \forall x \in \langle a,b \rangle$$

Бұл қасиетті суперпозиция қасиеті деп атайды.

4^0. Егер (1) теңдеудің оң жағы комплексты функция болса $f(x) = u(x) + iv(x)$, ал $y(x) = \alpha(x) + i\beta(x)$ комплексты функция сол теңдеудің шешімі болса, онда нақты $\alpha(x)$ және $\beta(x)$ функциялары сәйкес $L[y] = u(x)$ және $L[y] = v(x)$ теңдеулерінің шешімдері болады.

Шынында да, $L[\alpha(x) + i\beta(x)] \equiv u(x) + iv(x)$. Осыдан $L[\alpha(x)] \equiv u(x), L[\beta(x)] \equiv v(x)$ тепе-теңдіктері шығады.

Осы қасиеттерді пайдалансақ, төмендегідей қорытындыға келеміз.

Теорема. Біртексіз (1) теңдеудің жалпы шешімі осы теңдеудің бір дербес шешімі мен сәйкес біртекті (2) теңдеудің жалпы шешімінің қосындысынан тұрады.

Дәлелдеуі. Айталық, $y_1, y_2, ..., y_n$ біртекті (2) теңдеудің фундаменталь шешімдер жүйесі болсын, ал $\tilde{y}$ функциясы біртексіз (1) теңдеудің бір дербес шешімі болсын. Бұл жағдайда

$$y(x) = \tilde{y}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) \tag{3}$$

қосындысы берілген аралықта (1) теңдеудің жалпы шешім болатынын көрсетейік. Мұнда $C_1, ..., C_n$ - еркін тұрақтылар. 1^0 - қасиет бойынша (3) қосынды (1) теңдеудің шешімі:

$$L\left[\tilde{y} + \sum_{i=1}^{n} C_i y_i\right] = L[\tilde{y}] + \sum_{i=1}^{n} C_i L[y_i] = f(x), \forall x \in \langle a,b \rangle$$

Енді осы шешімнен кез келген Коши есебінің жалғыз ғана шешімін алуға болатынын көрсетсек, жеткілікті. Бастапқы шартты

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^{\,1}, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{\,n-1} \tag{4}$$

түрінде алсақ, онда төмендегідей жүйе аламыз:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \tilde{y}(x_0) + \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x_0) \\ y_0^{\,1} &= \tilde{y}'(x_0) + \sum_{i=1}^{n} C_i y_i'(x_0) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{\,n-1} &= \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n-1)}(x_0) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Бұл жүйе $C_1, ..., C_n$ сандары бойынша сызықты біртексіз алгебралық жүйе. Оның анықтауышы $\Delta = W(x_0) \neq 0$. Сондықтан, жүйенің нөлдік емес жалғыз ғана шешімі бар: $C_1^{\,0}, ..., C_n^{\,0}$. Осы сандарды (3) қатынасқа қойсақ, (1) теңдеудің (4) шартты қанағаттандыратын жалғыз ғана шешім аламыз.

5.2. Біртексіз теңдеудің жалпы шешімін табу үшін әдетте, тұрақтыларды вариациялау әдісі қолданылады. Бұл әдістің мәнісі – сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі белгілі деп, ондағы еркін тұрақтыларды x-қа байланысты айнымалы шамалар деп есептелініп, шешім мына түрде ізделінеді:

$$y=\sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i \tag{6}$$

мұндағы, $y_1, y_2, ..., y_n$- біртекті теңдеудің фундаменталь шешімдері. Осындағы $C_1(x),...,C_n(x)$ функцияларын (6) қосынды (1) теңдеудің шешімі болатындай етіп таңдайды. Бұл функцияларды анықтау үшін n теңдеу керек. Ол үшін (6) өрнекті n ретке дейін дифференциалдаймыз. Мұнда $C_1(x),...,C_n(x)$ функцияларының туындыларына қосымша шарт қойылып отырады.

Сонымен,

$$y'=\sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i' + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i$$

Осындағы екінші қосындыны нөлге теңейміз:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i = 0$$

Қалған бірінші қосындыдан екінші туынды табамыз:

$$y''=\sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i'' + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i'$$

Осындағы екінші қосындыны тағы да нөлге теңейміз:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i' = 0$$

Осылай қосындыны $n-1$ рет дифференциалдап, $C_1'(x),...,C_n'(x)$ туындыларының қосындысын әрдайым нөлге теңеп отырамыз. Сонда

$$y^{(n-1)}=\sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i^{(n-1)},$$

$$\text{ал } y^{(n)}=\sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-1)}$$

Соңғы екінші қосындыны нөлге теңестірмейді. Ол қосынды (1) теңдеудің оң жағындағы $f(x)$ функциясына тең деп алынады.

Себебі, (6) өрнекті және оның туындыларын (1) теңдеуге апарып қойсақ, төмендегідей теңдік аламыз:

$$L[y]=C_1(x)L[y_1]+...+C_n(x)L[y_n]+$$
$$+C_1'(x)y_1^{(n-1)}+...+C_n'(x)y_n^{(n-1)}=f(x)$$

мұнда $L[y_1]=...=L[y_n]=0$. Сонымен, $C_1'(x),...,C_n'(x)$ функцияларын анықтау үшін мынандай жүйе аламыз:

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x)y_1+...+C_n'(x)y_n=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}+...+C_n'(x)y_n^{(n-2)}=0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}+...+C_n'(x)y_n^{(n-1)}=f(x) \end{array}\right\} \tag{7}$$

Бұл $C_1'(x),...,C_n'(x)$ функциялары бойынша сызықты біртексіз алгебралық жүйе. Оның анықтауышы Вронский анықтауышы, ал ол нөлге тең емес. Өйткені, $y_1, y_2, ..., y_n$ шешімдері өзара сызықты тәуелсіз. Осы жүйені Крамер ережесі бойынша шешсек,

$$C_i'(x)=\frac{W_{ni}(x)f(x)}{W(x)},(i=1,...,n) \tag{8}$$

өрнегін аламыз. Мұндағы, $W_{ni}(x)$ - Вронский анықтауышының n -ші жатық жолы мен i -нші тік жолының қиылысында тұрған элементтің алгебралық толықтауышы.

Соңғы қатынасты интегралдап, $C_i(x)$ функциясын табамыз:

$$C_i(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{W_{ni}(\tau)f(\tau)}{W(\tau)}d\tau+C_i^0,(i=1,...,n) \tag{9}$$

Мұндағы, C_i^0 -еркін тұрақтылар. Табылған осы $C_1(x),...,C_n(x)$ функцияларды (6) қатынасқа қойсақ,

$$y=\sum_{i=1}^{n}y_i\int_{x_0}^{x}\frac{W_{ni}(\tau)f(\tau)}{W(\tau)}d\tau+\sum_{i=1}^{n}C_i^0y_i$$

функциясын аламыз. Бұл функция өзінің құрылымы бойынша (1) теңдеудің шешімі. Мұндағы, бірінші қосынды (1) теңдеудің дербес шешімін, екінші қосынды біртекті теңдеудің жалпы шешімін білдіреді. Сонымен, бастапқы айтылған қағидаға қайта келдік: біртексіз теңдеудің жалпы шешімі осы теңдеудің бір дербес шешімі мен оның сәйкес біртектісінің жалпы шешімінің қосындысынан тұрады.